

PACS numbers: 71.15.Qe, 71.35.-y, 73.20.Mf, 73.21.La, 73.22.Lp, 78.20.Bh, 78.20.Jq

Влияние поляризационного взаимодействия на спектроскопию экситонов в квазиульмерных системах

А. П. Шпак, С. И. Покутний*

*Институт металлофизики им. Г. В. Курдюмова НАН Украины
бульв. Акад. Вернадского, 36,
03680, ГСП, Киев-142, Украина*

**Ильичевский учебно-научный центр
Одесского национального университета им. И. И. Мечникова,
68001 Ильичевск, Одесская обл., Украина*

Проведен обзор результатов теоретических и экспериментальных исследований по спектроскопии экситонных состояний в квазиульмерных полупроводниковых системах. С помощью новых оптического и электрооптического методов показана возможность диагностики ряда фундаментальных параметров квазиульмерных структур.

Проведено огляд результатів теоретичних та експериментальних досліджень із спектроскопії екситонних станів у квазиульвимірних системах. За допомогою нових оптичної й електрооптичної метод показано можливість діагностики низки фундаментальних параметрів квазиульвимірних структур.

A given article reviews the results of theoretical and experimental investigations in spectroscopy of exciton states in quasi-zero-dimensional semiconductor structures. The opportunity to diagnose some basic parameters of quasi-zero-dimensional structures by new optical and electrooptic methods is demonstrated.

Ключевые слова: полупроводниковые квантовые точки, спектр экситона, размерное квантование, поляризационное и кулоновское взаимодействие, диагностика, оптические и электрооптические методы.

(Получено 5 декабря 2004 г.; окончат. вариант — 13 апреля 2005 г.)

ВВЕДЕНИЕ

Достижения твердотельной технологии привели к получению

кристаллических структур, линейные размеры которых сопоставимы с дебройлевской длиной волны электрона и дырки или (и) с их боровскими радиусами. При наноразмерных геометрических параметрах полупроводниковых систем явления пространственного размерного квантования носителей заряда играют существенную роль в оптических и электрооптических процессах в таких системах [1–8].

Теоретические и экспериментальные исследования таких гетероструктур позволяют решить общую проблему управления оптическими фундаментальными параметрами в кристаллических структурах и приборах: шириной запрещенной зоны, эффективными массами носителей и их подвижностями, энергетическими спектрами электронов и дырок, показателем преломления и коэффициентом поглощения света и т.д. [1–8].

В обзоре в основном будем рассматривать простые модели квазиуменьшенных систем, представляющие собой полупроводниковые микрокристаллы сферической формы с размерами $a \sim 1\text{--}10^2$ нм, так называемые сферические квантовые точки (КТ), выращенные в полупроводниковых (диэлектрических) матрицах [1–25]. Такие гетероструктуры привлекают внимание в связи с их нелинейными оптическими свойствами и приложениями в оптоэлектронике и в квантовой электронике (в частности, как новые материалы, перспективные для создания элементов, управляющих оптическими сигналами в инжекционных полупроводниковых лазерах [1–7, 23–26], и в оптических бистабильных элементах и транзисторах [4–7]).

Поскольку энергетическая щель полупроводника существенно меньше, чем в полупроводниковых (диэлектрических) матриц, то движение носителей заряда в КТ ограничено во всех трех направлениях объемом КТ (т.е. носители заряда двигаются в трехмерной сферической потенциальной яме). Последнее обстоятельство приводит к тому, что электрон и дырка, а также и экситон, в КТ не обладают квазиимпульсом. Поэтому можно говорить только о состояниях квазичастиц в КТ. В дальнейшем под экситоном в КТ будем понимать такое экситонное состояние, которое не имеет квазиимпульса.

Оптические и электрооптические свойства подобных гетерофазных систем, в значительной мере, определяются энергетическим спектром пространственно-ограниченной электронно-дырочной пары (экситона) [3–8, 12–26]. Энергетический спектр носителей заряда в КТ, начиная с размеров a порядка боровского радиуса электрона a_e и дырки a_h , будет полностью дискретным [27–34]. Поэтому такие КТ также называют «сверхатомами» [35, 36]. В этих условиях влияние поверхности раздела КТ–диэлектрическая матрица может вызвать размерное квантование энер-

гетического спектра электрона и дырки в КТ, связанное как с чисто пространственным ограничением области квантования [12–16, 18, 37–39], так и с поляризационным взаимодействием носителей заряда с поверхностью КТ [40–47].

С ростом радиуса КТ a до величины сопоставимой с длиной волны света необходимо учитывать эффекты пространственной дисперсии, которые вносят существенный вклад в поглощение света КТ [48–49]. Учет эффектов пространственной дисперсии приводит к возникновению в КТ поляритонов [49–54].

Впервые теоретическое и экспериментальное изучение оптических свойств квазиуменьренных полупроводниковых структур было предпринято в [12–16, 37]. В этих работах методами оптической спектроскопии были обнаружены эффекты размерного квантования экситонов в КТ CuCl и электронов в КТ CdS в матрице борносиликатного стекла.

К настоящему времени теория экситонных состояний в квазиуменьренных системах развита недостаточно. В частности, отсутствуют обзоры, посвященные вопросам теоретической спектроскопии экситонных состояний в таких гетероструктурах. Чтобы заполнить такой пробел в настоящем обзоре проводится анализ работ посвященных теоретическим исследованиям спектра экситона в КТ, а также межзонного поглощения света КТ, как функции параметров задачи. Показана возможность диагностики, с помощью новых оптического и электрооптического методов, квазиуменьренных полупроводниковых структур.

Результаты, изложенные в обзоре, касаются в основном простых квазиуменьренных систем. Тем не менее, они дают возможность понять закономерности в оптических процессах, обусловленных электронными и экситонными состояниями, протекающими в сложных многослойных сферических наносистемах [1–8]. Для более полного ознакомления с современным состоянием теории и экспериментов по оптическим свойствам квазиуменьренных систем рекомендуем обратиться к монографиям и обзорам [1–8].

2. ГАМИЛЬТониан ЭКСИТОНА В КВАЗИУМЬНЕРНОЙ СИСТЕМЕ

Следуя работам [27–34, 40–44] рассмотрим простую модель квазиуменьренной системы: нейтральную полупроводниковую сферическую КТ радиуса a с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 , окруженную средой с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 . В объеме такой КТ движутся электрон e и дырка h с эффективными массами m_e и m_h (r_e и r_h — расстояние электрона и дырки от центра КТ) (см. рис. 1). Предполагается, что зоны электронов и дырок имеют пара-

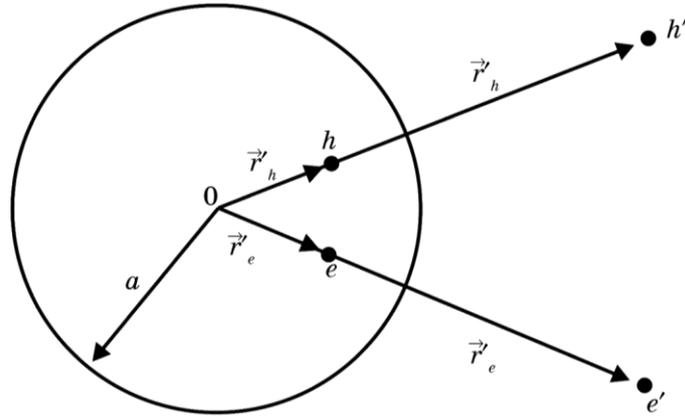


Рис. 1. Схематическое изображение экситона в сферическом полупроводниковом нанокристалле. Радиус-векторы r_e и r_h определяют расстояние электрона e и дырки h от центра нанокристалла радиуса a . Заряды изображений $e' = (a/r_e)e$ и $h' = -(a/r_h)e$ расположены на расстояниях $r'_e = (a^2/r_e)$ и $r'_h = (a^2/r_h)$ от центра нанокристалла 0 и представляют собой точечные заряды изображения электрона и дырки соответственно.

болическую форму. Характерными размерами задачи являются величины: a , a_e , a_h , a_{ex} , где

$$a_e = \varepsilon_2 \hbar^2 / m_e e^2, \quad a_h = \varepsilon_2 \hbar^2 / m_h e^2, \quad a_{ex} = \varepsilon_2 \hbar^2 / \mu e^2 \quad (1)$$

— боровские радиусы электрона, дырки и экситона соответственно в неограниченном полупроводнике с диэлектрической проницаемостью ε_2 (e — заряд электрона, $\mu = m_e m_h / (m_e + m_h)$ — приведенная эффективная масса экситона). То обстоятельство, что все характерные размеры задачи

$$a, a_e, a_h, a_{ex} \gg a_0 \quad (2)$$

(значительно больше межатомных a_0) [48], позволяет рассматривать движение электрона и дырки в КТ в приближении эффективной массы.

В изучаемой модели квазиульмерной системы в рамках вышеизложенных приближений гамильтониан экситона в КТ имеет вид [40, 41]:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_e - \frac{\hbar^2}{2m_h} \Delta_h + E_g + V_{eh}(r_e, r_h) + U(r_e, r_h, a), \quad (3)$$

где первые два члена определяют кинетическую энергию элек-

трона и дырки, E_g — ширина запрещенной зоны в неограниченном полупроводнике с диэлектрической проницаемостью ε_2 . В (3) энергия кулоновского взаимодействия между электроном и дыркой $V_{eh}(r_e, r_h)$ определяется таким выражением:

$$V_{eh}(r_e, r_h) = -\frac{e^2}{\varepsilon_2 |r_h - r_e|}. \quad (4)$$

Энергию поляризационного взаимодействия $U(r_e, r_h, a)$ (5) при $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ можно представить в виде алгебраической суммы энергий взаимодействия дырки и электрона со своими $V_{hh'}(r_h, a)$, $V_{ee'}(r_e, a)$ и «чужими» $V_{eh'}(r_e, r_h, a) = V_{he'}(r_e, r_h, a)$ изображениями соответственно [40, 41] (см. рис. 1)

$$U(r_e, r_h, a) = V_{hh'}(r_h, a) + V_{ee'}(r_e, a) + V_{eh'}(r_e, r_h, a) + V_{he'}(r_e, r_h, a), \quad (5)$$

где

$$V_{hh'}(r_h, a) = \frac{e^2}{2\varepsilon_2 a} \left(\frac{a^2}{a^2 - r_h^2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right), \quad (6)$$

$$V_{ee'}(r_e, a) = \frac{e^2}{2\varepsilon_2 a} \left(\frac{a^2}{a^2 - r_e^2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right), \quad (7)$$

$$V_{eh'} = V_{he'} = -\frac{e^2}{2\varepsilon_2 a} \frac{a}{\left[(r_e r_h / a)^2 - 2r_e r_h \cos \Theta + a^2 \right]^{1/2}}, \quad (8)$$

Несмотря на то, что в нашей модели квазиульмерной системы электрон и дырка не выходят за границу полупроводниковой КТ, тем не менее, потенциальная энергия их взаимодействия со сферической поверхностью раздела двух сред $U(r_e, r_h, a)$ (5) зависит не только от диэлектрической проницаемости КТ ε_2 , но и от диэлектрической проницаемости матрицы ε_1 , в которую погружена КТ [27–32, 40, 41]. Такая зависимость связана с проникновением электростатического поля, создаваемого электроном и дыркой, за объем КТ.

2. СПЕКТР ЭКСИТОНА В КВАЗИУЛЬМЕРНОЙ СИСТЕМЕ

Вопрос о проявлении эффекта размерного квантования в спектрах экситонного и межзонного поглощения КТ, по-видимому, впервые был изучен теоретически в [37]. В работе [37] было показано, что влияние квантового размерного эффекта на спектры поглощения и люминесценции КТ существенно зависит от соотношения трех характерных размеров: a , a_e и a_h (1).

При выполнении условия¹

$$a_0 \ll a \ll a_e, a_h, \quad (9)$$

в гамильтониане экситона (3) в КТ малого радиуса в первом приближении можно пренебречь энергиями $V_{eh}(r_e, r_h)$ (4) и $U(r_e, r_h, a)$ (5). Такое приближение соответствует приближению сильного размерного квантования электрона и дырки в КТ. В результате при межзонном поглощении света КТ прямозонных полупроводников в последних должна наблюдаться серия дискретных линий с частотой $\omega_{nl}(a)$ [37]:

$$\hbar\omega_{nl}(a) = E_{nl}(a) = E_g + E_{nl}^e(a) + E_{nl}^h(a), \quad (10)$$

где n и l — главное и орбитальное квантовое число электрона (дырки) соответственно. В (10) спектр электрона (дырки) $E_{nl}^{e(h)}(a)$ в КТ малого радиуса описывался уровнями энергии электрона (дырки) движущегося в сферически симметричной яме радиуса a с бесконечно высокими стенками

$$E_{nl}^{e(h)}(a) = T_{nl}^{e(h)}(a) \equiv \frac{\hbar^2}{2m_{e(h)}a^2} (\varphi_{nl}^{e(h)})^2, \quad (11)$$

где φ_{nl} — корни функции Бесселя $J_{l+1/2}(\varphi_{nl}) = 0$.

Во втором случае, рассмотренном в [37], при

$$a_h \ll a \leq a_e \approx a_{ex}, \quad (12)$$

в гамильтониане экситона (3) в КТ учитывалось кулоновское взаимодействие $V_{eh}(r_e, r_h)$ (4) между электроном и дыркой. При этом в рамках адиабатического приближения ($m_e \ll m_h$) уровни энергии дырки в электронном потенциале определялись спектром осцилляторного вида [37]

$$\tilde{\lambda}_{n_e, l_e=0}^{t_h}(a) = -\frac{e^2}{\varepsilon_2 a} \beta_{n_e} + \hbar\tilde{\omega}(a, n_e) \left(t_h + \frac{3}{2} \right), \quad (13)$$

где частота колебаний дырки

$$\tilde{\omega}(a, n_e) = \left(\frac{2}{3} \frac{\pi^2 n_e^2}{m_h a^2} \frac{e^2}{\varepsilon_2 a} \right)^{1/2}, \quad (14)$$

а коэффициент β_{n_e} определяется таким выражением

¹ КТ, радиусы которых a удовлетворяют условию (9), будем называть КТ малого радиуса.

$$\beta_{n_e} = 2 \int_0^{\pi n_e} \frac{\sin^2 y}{y} dy. \quad (15)$$

Здесь $t_h = 2n_{r_h} + l_h = 0, 1, 2, \dots$ — главное квантовое число дырки ($n_{r_h} = 0, 1, 2, \dots$ — радиальное квантовое число дырки). Формулы (13) и (14) получены в [37] для случая $l_e = 0$.

При выполнении условия²

$$a_h, a_e \ll a \quad (16)$$

самой большой величиной из энергий задачи являлась энергия связи экситона $E_{ex} = (\hbar^2 / 2\mu a_{ex}^2)$. При этом влияние сферической поверхности раздела КТ–диэлектрическая матрица, которое описывалось энергией поляризационного взаимодействия $U(r_e, r_h, a)$ (5), на энергию связи экситона E_{ex} оказалось экспоненциально слабым [37]. В первом приближении таким влиянием можно пренебречь. В результате, в КТ большого радиуса a (16) экситон квантовался как целое, а его энергетический спектр определялся выражением [37]:

$$E_{nl}(a) = E_g - E_{ex} + \frac{\hbar^2}{2M a^2} \Phi_{nl}^2, \quad (17)$$

где $M = (m_e + m_h)$ — трансляционная масса экситона. В этом случае сдвиг экситонного уровня $E_{nl}(a)$ (17), обусловленный изменением радиуса a КТ, определялся полной массой экситона M (см. рис. 3).

В работе [37] энергетический спектр экситона в КТ с размерами $a \leq a_{ex}$ был получен в приближении, в котором в гамильтониане (3) пренебрегалось энергией поляризационного взаимодействия электрона и дырки $U(r_e, r_h, a)$ (5) с поверхностью КТ. Такое приближение, вообще говоря, является не совсем оправданным, поскольку в КТ с радиусами $a \leq a_{ex}$, как было показано в [40, 41, 59–62, 72–79], энергия поляризационного взаимодействия $U(r_e, r_h, a)$ (5) была сравнимой по величине с энергией кулоновского притяжения электрона и дырки $V_{eh}(r_e, r_h)$ (4).

Нами в работах [40, 41, 72–76], по-видимому, впервые в гамильтониане экситона (3) в КТ было учтено поляризационное взаимодействие носителей заряда $U(r_e, r_h, a)$ (5) с индуцированным ими поверхностным зарядом на сферической поверхности раздела КТ–диэлектрическая матрица. Позже такое поляризационное взаимодействие было также учтено при расчетах спектров экситона [42–44] и биэкситона [43] в КТ.

² КТ, радиусы которых a удовлетворяют условию (16), будем называть КТ большого радиуса.

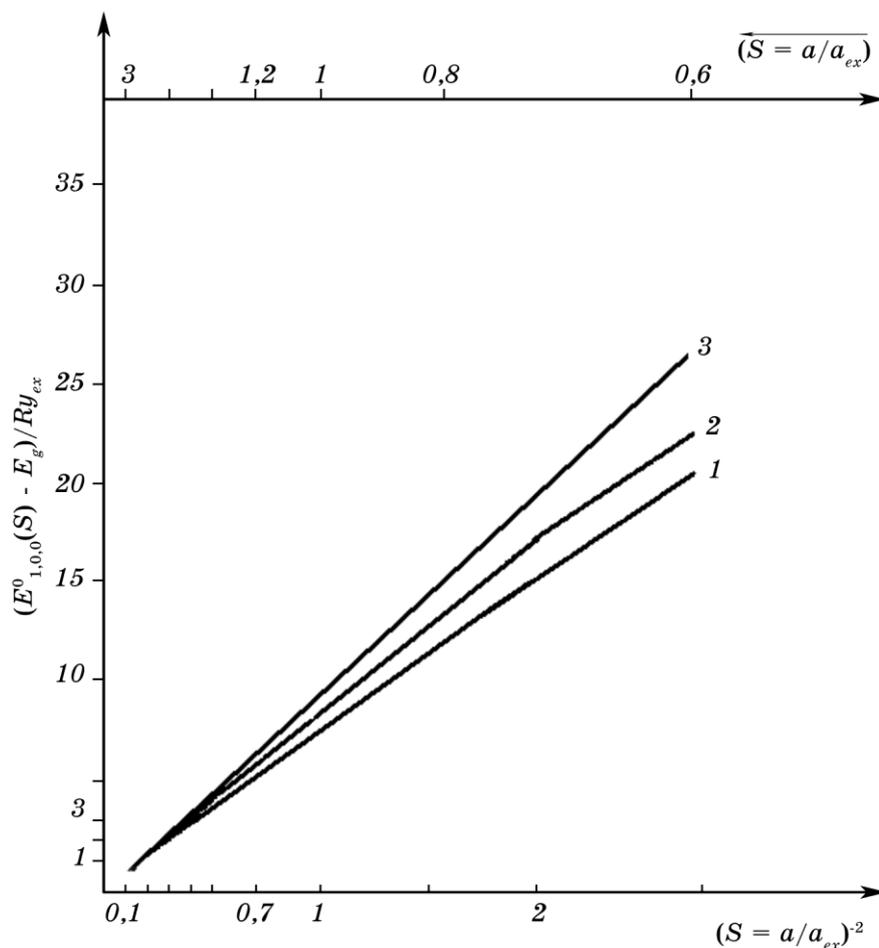


Рис. 2. Энергетический спектр экситона $E_{1,0,0}^0(S)$, как функция нанокристалла ($S = a/a_{ex}$). Кривые соответствуют: 1 — спектру экситона, взятому из экспериментов [14, 57]; 2 — спектру экситона $E_0(a)$, полученному вариационным методом; 3 — кинетической энергии электрона $T_{1,0}^e(S)$ (11).

2.1. Спектр экситона в потенциальной яме бесконечной глубины квантовой точки

Следуя работам [40, 41, 72–79] получим спектр экситона в КТ в предположении, что КТ для электрона и дырки, которые двигались в её объёме, являлась бесконечно глубокой потенциальной ямой. При этом радиус a КТ ограничен условием (12), при выполнении которого в потенциальной энергии гамильтониана (3) поляризационное взаимодействие $U(r_e, r_h, a)$ (5) играло доминирующую роль. В условиях (12) можно использовать адиабатиче-

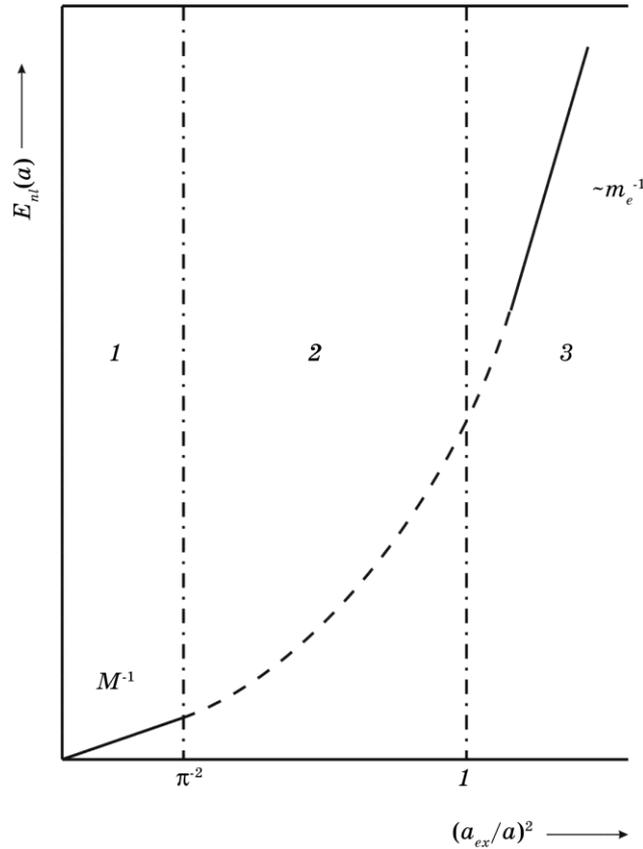


Рис. 3. Схематическое изображение зависимости энергетического спектра экситона $E_n(a)$ от радиуса a нанокристалла. Области радиусов a соответствуют: 1 — приближению сильного размерного квантования (9); 2 — $a \approx a_{ex}$ (12); 3 — КТ большого радиуса (16). Этот рис. взят из работы [18].

ское приближение, считая кинетическую энергию электрона самой большой величиной и рассматривая последние два члена в гамильтониане (3) вместе с оператором неадиабатичности по теории возмущений. При этом волновая функция экситона в КТ радиуса a в адиабатическом приближении принимала вид [80]

$$\Psi(r_e, r_h, a) = \Psi_{n_e, l_e, m_e}(r_e, a, \Theta_e, \varphi_e) \chi_{n_h, l_h, m_h}^{n_e, l_e, m_e}(r_h, a, \Theta_h, \varphi_h), \quad (18)$$

где Ψ_{n_e, l_e, m_e} и $\chi_{n_h, l_h, m_h}^{n_e, l_e, m_e}$ — волновые функции электрона и дырки, (n_e, l_e, m_e) и (n_h, l_h, m_h) — главное, орбитальное и магнитное квантовые числа электрона и дырки, Θ_e, φ_e и Θ_h, φ_h — азимутальные и полярные углы электрона и дырки соответственно.

Используя только первый порядок теории возмущений, спектр

экситона $E_{n_e, l_e=0, m_e=0}^{n_h, l_h, m_h=0}(S)$ в состоянии $(n_e, l_e = 0, m_e = 0; n_h, l_h, m_h = 0)$ в КТ радиуса S получим в таком виде [41, 72–76]:

$$E_{n_e, 0, 0}^{n_h, l_h, 0}(S) = E_g + T_{n_e, l_e=0}^e(S) + \bar{V}_{ee'}(S) + \lambda_{n_e, 0, 0}^{n_h, l_h, 0}(S), \quad (19)$$

где $T_{n_e, 0}^e(S) = E_{n_e, 0}^e(S)$ — кинетическая энергия электрона в сферической яме бесконечной глубины определялась формулой (11), $\bar{V}_{ee'}(S)$ — среднее значение энергии взаимодействия электрона с собственным изображением на волновых функциях сферической ямы бесконечной глубины КТ. В формуле (19) $\lambda_{n_e, 0, 0}^{n_h, l_h, 0}(S)$ представляет собой спектр дырки осцилляторного вида:

$$\lambda_{n_e, 0, 0}^{t_h}(S) = \frac{P_{n_e, 0}}{S} + \omega(S, n_e) \left(t_h + \frac{3}{2} \right), \quad (20)$$

$$\frac{P_{n_e, 0}}{S} = \bar{V}_{hh'}(S) + \left(\bar{V}_{eh}^{n_e, 0, 0}(S) \right)' + \left(\bar{V}_{eh'}^{n_e, 0, 0}(S) + \bar{V}_{he'}^{n_e, 0, 0}(S) \right), \quad (21)$$

где частота колебаний дырки

$$\omega(S, n_e) = 2 \left(1 + \frac{2}{3} \pi^2 n_e^2 \right)^{1/2} \left(\frac{m_e}{m_h} \right)^{1/2} S^{-3/2}. \quad (22)$$

Справедливость представления спектра дырки $\lambda_{n_e, 0, 0}^{t_h}(S)$ (20) в виде спектра трехмерного гармонического осциллятора сводится к требованию [41, 72–76]

$$S^{1/2} \gg S_0^{1/2} = \left(\frac{m_e}{m_h} \right)^{1/2} \frac{t_h + \frac{3}{2}}{\left(1 + \frac{2}{3} \pi^2 n_e^2 \right)^{1/2}}. \quad (23)$$

Запишем выражения для средних значений энергии взаимодействия электрона с собственным изображением [41, 72–76]:

$$\bar{V}_{ee'}^{n_e, 0, 0}(S) = \frac{Z_{n_e, 0}}{S}, \quad (24)$$

$$Z_{n_e, 0} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + 2 \int_0^1 \frac{dx \sin^2(\pi n_e x)}{1 - x^2} \quad (25)$$

энергии взаимодействия дырки с собственным изображением

$$\bar{V}_{hh'}(S) = \frac{1 + (\varepsilon_2 / \varepsilon_1)}{S}, \quad (26)$$

энергий взаимодействия электрона и дырки с «чужими» изобра-

жениями

$$\bar{V}_{eh'}^{n_e,0,0}(S) + \bar{V}_{he'}^{n_e,0,0}(S) = -\frac{2}{S}, \quad (27)$$

и энергии кулоновского взаимодействия электрона с дыркой

$$\left(\bar{V}_{eh}^{n_e,o,o}(S)\right)' = -\frac{2}{S} \left[\ln(2\pi n_e) + \gamma - \text{Ci}(2\pi n_e) \right], \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{eh}^{n_e,o,o;t_h}(S) &= \left(\bar{V}_{eh}^{n_e,o,o}(S)\right)' + \omega(S, n_e) \left(t_h + \frac{3}{2} \right) = \\ &= -\frac{2}{S} \left[\ln(2\pi n_e) + \gamma - \text{Ci}(2\pi n_e) \right] + \omega(S, n_e) \left(t_h + \frac{3}{2} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Следует отметить, что формулы (20)–(29), получены путем усреднения соответствующих выражений (4), (6)–(8) по волновым функциям сферической ямы бесконечной глубины КТ [41, 73, 74].

Энергия поляризационного взаимодействия $U(r_e, r_h, a)$ (5), усредненная на электронных волновых функциях сферической ямы бесконечной глубины принимает вид:

$$\bar{U}_{pol}^{n_e,o,o}(S) = \bar{V}_{hh'}(S) + \bar{V}_{ee'}^{n_e,o,o}(S) + \left(\bar{V}_{eh'}^{n_e,o,o}(S) + \bar{V}_{he'}^{n_e,o,o}(S) \right). \quad (30)$$

С учетом формул (24)–(27), энергия поляризационного взаимодействия $\bar{U}_{pol}^{n_e,o,o}(S)$ (30) запишется в таком виде

$$\bar{U}_{pol}^{n_e,o,o}(S) = \frac{Z_{n_e,o} + (\varepsilon_2 / \varepsilon_1) - 1}{S}. \quad (31)$$

Здесь и далее энергия измеряется в единицах $Ry_e = (\hbar^2 / 2m_e a_e^2)$, и используются безразмерные величины длины $x = (r_h / a)$ и $S = (a / a_e)$.

Выражение для спектра экситона $E_{n_e,o,o}^{t_h}(S)$ (19) в состоянии $(n_e, o, o; t_h)$ в КТ, радиусы которых S одновременно удовлетворяют условиям (12) и (23), с учетом (20), (21) и (28)–(30) запишем в виде:

$$E_{n_e,o,o}^{t_h}(S) = E_g + T_{n_e,o}^e(S) \left[1 + \frac{\bar{U}_{pol}^{n_e,o,o}(S)}{T_{n_e,o}^e(S)} - \frac{|\tilde{V}_{eh}^{n_e,o,o;t_h}(S)|}{T_{n_e,o}^e(S)} \right]. \quad (32)$$

Следует отметить, что спектр экситона (32) получен в рамках адиабатического приближения, в котором предполагается, что кинетическая энергия электрона $T_{n_e,o}^e(S) = (\pi^2 n_e^2 / S^2)$ (11) даёт основной вклад в спектр экситона в КТ. Поэтому представление спектра экситона $E_{n_e,o,o}^{t_h}(S)$ в виде формулы (32) даёт возможность просле-

дить вклад, вносимый в спектр экситона энергией кулоновского взаимодействия (29) электрона с дыркой, а также энергией поляризационного взаимодействия (30) по отношению ко вкладу, который дает в спектр кинетическая энергия электрона (11).

Полученный спектр экситона (32) применим только для нижайших состояний экситона $(n_e, 0, 0; t_h)$, для которых выполняется неравенство

$$E_{n_e,0,0}^{t_h}(S) - E_g \ll \Delta V(S), \quad (33)$$

где $\Delta V(S)$ — глубина потенциальной ямы для электронов в КТ (в КТ CdS в области размеров (12) величина $\Delta V = (2, 3 \dots 2, 5)$ эВ [57]).

В [79] для простой модели квазинульмерной системы (см. рис. 1), в которой гамильтониан экситона H описывался формулой (3), не ограничиваясь рамками адиабатического приближения, вариационным методом был найден спектр $E_0(a)$ основного состояния экситона в КТ радиуса a . При этом радиус КТ a , в отличие от [41, 72–78], не ограничивался условием (12). Результаты вариационного расчета спектра экситона $E_0(a)$ в КТ радиуса a показаны на рис. 2. При этом спектр экситона $E_0(a)$ в КТ радиуса a был получен в [79] в условиях экспериментов [15, 16, 57, 58].

2.2. Спектр экситона в потенциальной яме конечной глубины квантовой точки

Для определения спектра экситона $E_{n_e, l_e, m_e}^{n_h, l_h, m_h}(a)$ в КТ радиуса a с учетом выхода электрона из объема КТ в матрицу, в которую погружена КТ (при этом тяжелая дырка $(m_e \ll m_h)$ двигалась в объеме КТ, не выходя из него), в [60–62], в частности, были найдены волновые функции электрона в КТ и в матрице, а также спектр электрона $E_{nl}(a)$ в КТ, которая представляла собой сферическую потенциальную яму радиусом a и глубиной V_0 . Волновую функцию электрона $\Psi_{n_e, l_e, m_e}(r_e, a, \Theta_e, \Phi_e)$ (18) в КТ и в диэлектрической матрице можно записать в таком виде [81]:

$$\Psi_{n_e, l_e, m_e}(r_e, a, \Theta_e, \Phi_e) = f_{n_e, l_e}(r_e) Y_{l_e, m_e}(\Theta_e, \Phi_e), \quad (34)$$

где $f_{n_e, l_e}(r_e)$ — радиальная волновая функция, а $Y_{l_e, m_e}(\Theta_e, \Phi_e)$ является нормированной шаровой функцией.

Электронные волновые функции $f^{(2)}(r)$ и $f^{(1)}(r)$ на сферической поверхности раздела КТ радиуса a с диэлектрической матрицей при $r = a$ удовлетворяют таким граничным условиям [82]:

$$f_{n_e, l_e}^{(1)}(r) \Big|_{r=a} = f_{n_e, l_e}^{(2)}(r) \Big|_{r=a}, \quad (35)$$

$$\frac{1}{m_{e,1}} \left. \frac{df_{n_e, l_e}^{(1)}(r)}{dr} \right|_{r=a} = \frac{1}{m_{e,2}} \left. \frac{df_{n_e, l_e}^{(2)}(r)}{dr} \right|_{r=a}, \quad (36)$$

где $f_{n_e, l_e}^{(2)}(r)$ — радиальная волновая функция электрона, движущегося в объеме КТ с эффективной массой $m_{e,1}$ (при $r \leq a$), $f_{n_e, l_e}^{(1)}(r)$ — радиальная волновая функция электрона, находящегося в матрице с эффективной массой $m_{e,2}$ (при $r > a$). Первое из условий (35), (36) (условие (35)) вытекает из условия непрерывности для электронной плотности вероятности, а второе условие (условие (36)) обусловлено условием непрерывности для электронной плотности потока вероятности на границе раздела $r = a$.

В [60–62], с помощью формул (35) и (36), с учетом явного вида электронных волновых функций $f^{(2)}(r)$ и $f^{(1)}(r)$ (при $l_e = 0, 1$), было получено уравнение

$$\text{tg}(x_0 \xi) = R_l(x_0 \xi), \quad (37)$$

где функции $R_l(x_0 \xi)$ при $l = 0$ и 1 принимали вид:

$$R_0(x_0 \xi) = (x_0 \xi) \left[1 - \beta - \beta x_0 \left(1 - (\xi^2 / \beta) \right)^{1/2} \right]^{-1}, \quad (38)$$

$$R_1(x_0 \xi) = (x_0 \xi) \left[1 - \frac{(x_0 \xi)^2 D(x_0, \xi, \beta)}{1 + [2(\beta - 1) + (x_0 \xi)^2] D(x_0, \xi, \beta)} \right]. \quad (39)$$

Здесь введены такие обозначения:

$$(x_0 \xi)_{nl} \equiv (pa)_{nl} = \left[(2m_{e,2} a^2 / \hbar^2) E_{nl}(a) \right]^{1/2} \equiv x_0 \xi, \quad \lambda a \equiv x_0 \left(1 - (\xi^2 / \beta) \right)^{1/2}, \quad (40)$$

$$x_0 = \left[\frac{2m_{e,2} a^2 V_0}{\hbar^2 \beta} \right]^{1/2}, \quad \xi = \left(\beta \frac{E_{nl}(a)}{V_0} \right)^{1/2}, \quad \beta \equiv \frac{m_{e,2}}{m_{e,1}},$$

$$D(x_0, \xi, \beta) = \beta^{-1} \left[1 + x_0 \left(1 - (\xi^2 / \beta) \right)^{1/2} \right] / x_0^2 \left(1 - (\xi^2 / \beta) \right). \quad (41)$$

Решения уравнений (37)–(41) (численные или графические) при определенном значении параметра β , давали спектр электрона

$$E_{nl}(a) = \frac{\hbar^2}{2m_{e,2} a^2} (x_0 \xi)_{nl}^2 \equiv T_{nl}^e(a) \quad (42)$$

в КТ малого радиуса a , с учетом выхода электрона из объема КТ в окружающую ее матрицу. Величина $E_{nl}(a)$ (42) определяла также кинетическую энергию электрона $T_{nl}^e(a)$ в сферической яме конеч-

ной глубины КТ. С другой стороны, если известно значение энергии электрона $E_{nl}(a)$ в КТ определенного радиуса a (например, из эксперимента), то из решения уравнений (37)–(42) можно определить значение параметра $\beta \equiv (m_{e,2}/m_{e,1})$, т.е. отношение эффективных масс электрона в КТ и в окружающей ее диэлектрической матрице.

В рамках адиабатического приближения, а также приближения эффективной массы, используя первый порядок теории возмущений на электронных волновых функциях сферической потенциальной ямы конечной глубины, в [60–62] получен спектр экситона

$$E_{n_e,0,0}^{t_h}(S) = E_g + \frac{(pa)_{n_e,0}^2}{S^2} + \frac{Z_{n_e,0} + P_{n_e,0}}{S} + \omega(S, n_e) \left(t_h + \frac{3}{2} \right), \quad (43)$$

в состоянии $(n_e, l_e = m_e = 0; t_h)$ в КТ радиусом $S = (a/a_e)$ (12). Здесь и далее энергия измеряется в единицах $Ry_e = (\hbar^2/2m_{e,2}a_e^2)$. Входящие в спектр экситона (43) величины определялись таким образом:

$$Z_{n_e,0} = \left[1 - \frac{\sin((2pa)_{n_e,0})}{2(pa)_{n_e,0}} + \frac{\sin^2((pa)_{n_e,0})}{(\lambda a)_{n_e,0}} \right]^{-1} \times \\ \times \left[\left(1 - \frac{\sin((2pa)_{n_e,0})}{2(pa)_{n_e,0}} \right) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + 2 \int_0^1 \frac{dx \sin^2((pa)_{n_e,0} x)}{1-x^2} \right], \quad (44)$$

$$P_{n_e,0} = 1 + \left[1 - \frac{\sin((2pa)_{n_e,0})}{2(pa)_{n_e,0}} + \frac{\sin^2((pa)_{n_e,0})}{(\lambda a)_{n_e,0}} \right]^{-1} \times \\ \times \left[2\text{Ci}(2(pa)_{n_e,0}) - 2\ln(2(pa)_{n_e,0}) - 2\gamma + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \right. \\ \left. - 2 + \frac{\sin(2(pa)_{n_e,0})}{(pa)_{n_e,0}} - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \frac{\sin(2(pa)_{n_e,0})}{2(pa)_{n_e,0}} \right], \quad (45)$$

а частота осцилляторных колебаний дырки $\omega(S, n_e)$ имела вид:

$$\omega(S, n_e) = \\ = \frac{2}{S^{3/2}} \left(\frac{m_{e,2}}{m_h} \right)^{1/2} \left[1 + \left(1 - \frac{\sin((2pa)_{n_e,0})}{2(pa)_{n_e,0}} + \frac{\sin^2((pa)_{n_e,0})}{(\lambda a)_{n_e,0}} \right)^{-1} \frac{2}{3} (pa)_{n_e,0}^2 \right]^{1/2}, \quad (46)$$

Следует отметить, что спектр экситона (43) был получен в [60–62] в рамках одних и тех же приближений, использованных в [41, 72–78] для нахождения спектра экситона (32) в КТ, которая представляла собой сферическую потенциальную яму бесконечной глубины. Поэтому спектр экситона $E_{n_e,0,0}^{t_h}(S)$ (43) в пределе $\beta = 1$ (т.е. $m_{e,1} = m_{e,2}$), $(pa)_{n_e,0} = (x_0 \xi)_{n_e,0} \rightarrow n_e \pi$ и $(\lambda a) \sim V_0^{1/2} \rightarrow \infty$ переходит в соответствующее выражение для спектра экситона (32) в КТ, полученного нами в [41, 72–78] при $V_0 \rightarrow \infty$.

В отличие от [60–62], в работе [43] при определении численными методами спектра экситона в КТ не использовались граничные условия (35), (36). Поэтому найденный в [44] спектр экситона нельзя сравнивать со спектром экситона (43), полученным в [60–62].

2.3. Вклад кинетической, поляризационной и кулоновской энергий в спектр экситона в квантовых точках

В [15, 50] наблюдались пики межзонного поглощения диспергированных в прозрачной матрице силикатного стекла (с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = 2,25$ [38]) сферических КТ CdS ($\varepsilon_2 = 9,3$) с радиусами a в интервале от 1,2 до 30 нм. Эффективные массы электрона m_e , дырки m_h и приведенная масса экситона μ в CdS соответственно равнялись: $m_e = 0,205m_0$, $m_h = 5m_0$ и $\mu = 0,197m_0$. В [15, 58] экспериментально определялась зависимость положения линий поглощения КТ, обусловленных межзонами переходами на уровни размерного квантования электрона ($n_e = 1, l_e = 0$), ($n_e = 1, l_e = 1$) и ($n_e = 1, l_e = 2$) в зоне проводимости, от радиуса КТ a .

В экспериментальной работе [66] были обнаружены пики просветления, связанные с переходами между уровнями размерного квантования экситона, в спектрах пропускания КТ CdSe (с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 = 9,4$) радиусом $a \approx 5$ нм, диспергированных в прозрачной матрице силикатного стекла (с $\varepsilon_1 = 2,25$ [38]). Эффективные массы электрона m_e , дырки m_h и приведенная масса экситона μ в CdSe соответственно равнялись: $m_e = 0,13m_0$, $m_h = 2,5m_0$ и $\mu = 0,124m_0$.

Как было показано в [41, 60–62, 72–78], формула (32) с хорошей точностью описывала спектр экситона $E_{1,0,0}^{t_h}(S)$ как функцию радиуса КТ S в условиях экспериментов [15, 58] в КТ CdS и в [66] в КТ CdSe. В таблицах 1 и 2 содержатся параметры спектра экситона $E_{1,0,0}^{t_h}(S)$ (32) в условиях экспериментов [15, 58] для КТ CdS с радиусами $a = (1,5 \dots 3,0)$ нм.

Согласно формулам (30), (31), (29) и (11) отношение энергии поляризационного взаимодействия $(\bar{U}_{pol}^{1,0,0}(S)/T_{1,0}^e(S))$ к кинетической энергии электрона, а также отношение энергии кулоновского взаимодействия $(\bar{V}_{eh}^{1,0,0;t_h}(S)/T_{1,0}^e(S))$ к кинетической энергии электрона, как функций радиуса КТ S , с ростом радиуса S увеличиваются соот-

ветственно $\sim S$ и $\sim (S, S^{1/2})$.

Такое поведение $(\bar{U}_{pol}^{1,0,0}(S)/T_{1,0}^e(S))$ (31) и $(\tilde{V}^{1,0,0;t_h}(S)/T_{1,0}^e(S))$ (29) также подтверждается численными результатами, приведенными на

ТАБЛИЦА 1. Вклад в спектр экситона $E_{1,0,0}^{t_h}(a)$ (19), (32), (53), вносимый энергией кулоновского взаимодействия электрона и дырки $(\tilde{V}^{1,0,0;t_h}(a)/T_{1,0}^e(a))$ (29), а также энергией поляризационного взаимодействия $(\bar{U}_{pol}^{1,0,0}(a)/T_{1,0}^e(a))$ (31) по отношению ко вкладу, который дает кинетическая энергия электрона $T_{1,0}^e(a)$ (11). Величины приведены для КТ CdS с радиусами $a = (1,5 \dots 3,0)$ нм в условиях экспериментов [15, 58].

a (нм) (S)	$T_{1,0}^e(S)$, [Ry_e]	t_h	$\frac{\tilde{V}_{eh}^{1,0,0;t_h}(S)}{T_{1,0}^e(S)}$, %	$\frac{\bar{U}_{pol}^{1,0,0}(S)}{T_{1,0}^e(S)}$, %	$\eta(S)$, %	$[E_{1,0,0}^{t_h}(S) - E_g]$, [Ry_e]
1,5 (0,624)	25,35	0	17,4	55,8	4,8	35,08
		1	8,5		12,74	37,34
2,0 (0,83)	14,26	0	25,6	74,4	4,3	21,21
		1	15,3		13,5	22,68
2,5 (1,04)	9,13	0	34,0	93,0	3,7	14,51
		1	22,5		13,7	15,56
3,0 (1,25)	6,34	0	42,6	111,5	2,6	10,71
		1	30,0		13,8	11,51

ТАБЛИЦА 2. Вклад в энергию поляризационного взаимодействия $\bar{U}_{pol}^{1,0,0}(a)$ (31), вносимый энергией взаимодействия электрона со своим изображением $\bar{V}^{1,0,0}(a)$ (24), энергией взаимодействия дырки со своим изображением $\bar{V}_{hh'}^{1,0,0}(a)$ (26) и энергиями взаимодействия электрона с «чужим» изображением и дырки с «чужим» изображением $(\bar{V}_{eh'}^{1,0,0}(a) + \bar{V}_{he'}^{1,0,0}(a))$ (27), а также отношение энергии кулоновского взаимодействия к энергии поляризационного взаимодействия $(\tilde{V}_{eh}^{1,0,0;t_h}(a)/\bar{U}_{pol}^{1,0,0}(a))$ (29), (31). Величины приведены для КТ CdS с радиусами $a = (1,5 \dots 3,0)$ нм в условиях экспериментов [15, 58].

a (нм) (S)	$\bar{U}_{pol}^{1,0,0}(S)$, [Ry_e]	$\frac{\bar{V}_{ee'}^{1,0,0}(S)}{\bar{U}_{pol}^{1,0,0}(S)}$, %	$\frac{\bar{V}_{hh'}^{1,0,0}(S)}{\bar{U}_{pol}^{1,0,0}(S)}$, %	$\frac{(\bar{V}_{eh'}^{1,0,0}(S) + \bar{V}_{he'}^{1,0,0}(S))}{U_{pol}^{1,0,0}(S)}$, %	t_h	$\frac{\tilde{V}_{eh}^{1,0,0;t_h}(S)}{\bar{U}_{pol}^{1,0,0}(S)}$, %
1,5 (0,624)	14,14	64,5	58,2	22,7	0	31,2
					1	15,2
2,0 (0,83)	10,61	64,5	58,2	22,7	0	34,4
					1	20,5
2,5 (1,04)	8,49	64,5	58,2	22,7	0	36,6
					1	24,2
3,0 (1,25)	7,07	64,5	58,2	22,7	0	38,2
					1	26,9

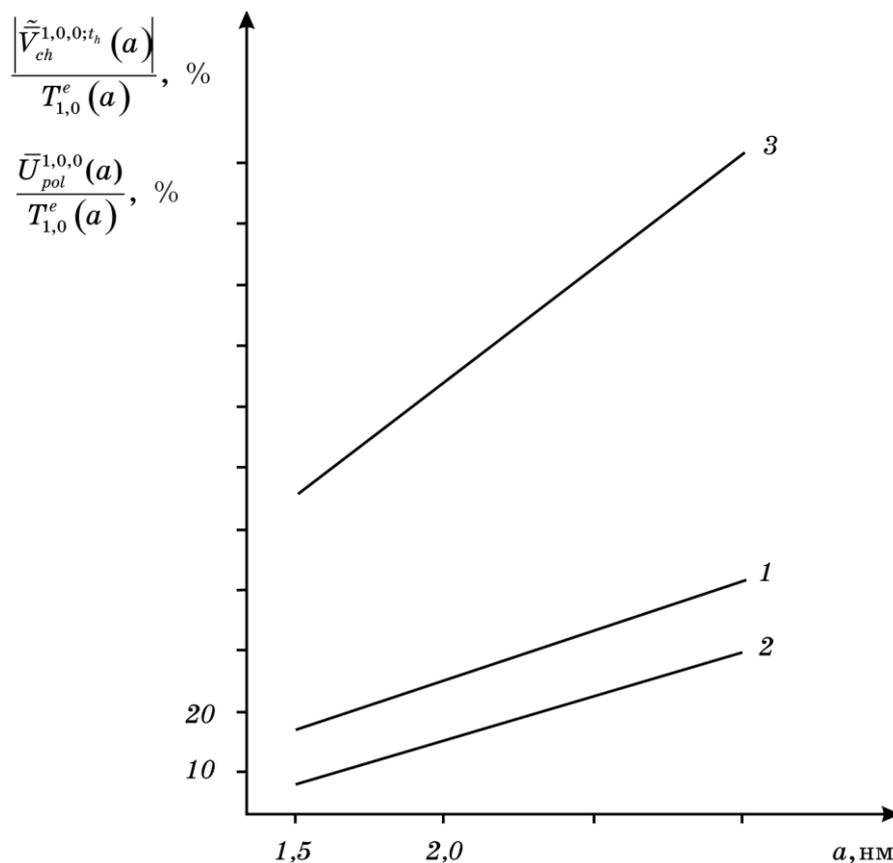


Рис. 4. Вклад в спектр экситона $E_{1,0,0}^{t_h}(a)$ (19), (32), (49), вносимый энергией кулоновского взаимодействия электрона и дырки $(\tilde{V}_{ch}^{1,0,0;t_h}(a)/T_{1,0}^e(a))$ (29) (кривые 1 и 2 соответствуют состояниям с $t_h = 0$ и $t_h = 1$), а также энергией поляризационного взаимодействия $(\bar{U}_{pol}^{1,0,0}(a)/T_{1,0}^e(a))$ (31) (кривая 3) по отношению ко вкладу, который дает кинетическая энергия электрона $T_{1,0}^e(a)$ (11). Величины приведены для КТ сульфида кадмия с радиусами $a = (1,5...3,0)$ нм в условиях экспериментов [15, 58].

рис. 4.

Из рисунка 4 следует, что в спектр экситона (32) самый большой вклад вносит энергия поляризационного взаимодействия $(\bar{U}_{pol}^{1,0,0}(S)/T_{1,0}^e(S))$ (31) (от 55,8% при $a = 1,5$ нм до 112% при $a = 3$ нм), тогда как энергия кулоновского взаимодействия $(\tilde{V}_{eh}^{1,0,0;t_h}(S)/T_{1,0}^e(S))$ (29) вносит лишь малый отрицательный вклад (модуль которого изменяется от 17,4% ($t_h = 0$) и 8,5% ($t_h = 1$) при $a = 1,5$ нм до 42,6% ($t_h = 0$) и 30% ($t_h = 1$) при $a = 3$ нм).

Приведенные на рис. 5 результаты также подтверждаются ре-

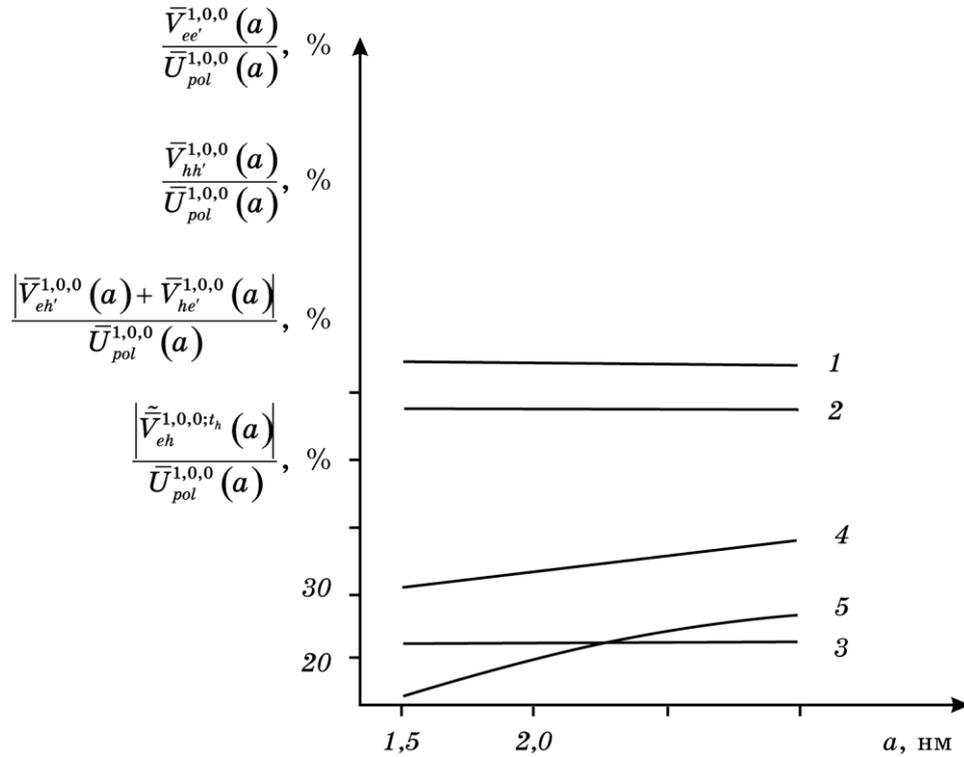


Рис. 5. Вклад в энергию поляризационного взаимодействия $\bar{U}_{pol}^{1,0,0}(a)$ (31), вносимый энергией взаимодействия электрона со своим изображением $\bar{V}_{ee'}^{1,0,0}(a)$ (24) (кривая 1), энергией взаимодействия дырки со своим изображением $\bar{V}_{hh'}^{1,0,0}(a)$ (26) (кривая 2) и энергиями взаимодействия электрона с «чужим» изображением и дырки с «чужим» изображением $(\bar{V}_{eh'}^{1,0,0}(a) + \bar{V}_{he'}^{1,0,0}(a))$ (27) (кривая 3), а также отношение энергии кулоновского взаимодействия к энергии поляризационного взаимодействия $(\bar{V}_{eh}^{1,0,0;t_h}(a) / \bar{U}_{pol}^{1,0,0}(a))$ (29), (31) (кривые 4 и 5 соответствуют состояниям с $t_h = 0$ и $t_h = 1$). Величины приведены для КТ сульфида кадмия с радиусами $a = (1,5 \dots 3,0)$ нм в условиях экспериментов [15, 58].

результатами вариационного расчета спектра экситона $E_0(a)$ в КТ радиуса a , которые были получены в [79] без использования адиабатического приближения в условиях экспериментов [14, 15, 58].

Основной вклад в энергию поляризационного взаимодействия $\bar{U}_{pol}^{1,0,0}(S)$ (30) вносят энергия взаимодействия электрона со своим изображением $(\bar{V}_{ee'}^{1,0,0}(S) / \bar{U}_{pol}^{1,0,0}(S))$ (24), (31) (64,5%) и энергия взаимодействия дырки со своим изображением $(\bar{V}_{hh'}^{1,0,0}(S) / \bar{U}_{pol}^{1,0,0}(S))$ (26), (31) (58,2%), тогда как энергия взаимодействия электрона с «чужим» изображением и энергия взаимодействия дырки с «чужим» изображением $((\bar{V}_{eh'}^{1,0,0}(S) + \bar{V}_{he'}^{1,0,0}(S)) / \bar{U}_{pol}^{1,0,0}(S))$ (27), (31) дает

отрицательный вклад (модуль которого равняется 22,7%) (см. рис. 5). Существенно, что эти вклады не зависят от радиуса КТ S .

Энергия кулоновского взаимодействия $\bar{V}_{eh}^{1,0,0;t_h}(S)$ (29) дает значительно меньший вклад в спектр экситона (19), (32) по сравнению с энергией поляризационного взаимодействия $\bar{U}_{pol}^{1,0,0}(S)$ (31). Отношение этих энергий $(\bar{V}_{eh}^{1,0,0;t_h}(S)/\bar{U}_{pol}^{1,0,0}(S))$ является отрицательным (модуль такого отношения изменяется от 31% ($t_h = 0$) и 15% ($t_h = 1$) при $a = 1,5$ нм до 38% ($t_h = 0$) и 27% ($t_h = 1$) при $a = 3$ нм) (рис. 5).

В работе [15] утверждалось, что с ростом радиуса a КТ CdS, начиная с размеров $a \geq 2,0$ нм, экспериментальный спектр экситона хорошо описывался кинетической энергией электрона $T_{1,0}^e(a)$ (11) в КТ. В действительности, как следует из рис. 4, при $3,0 \text{ нм} \leq a \leq 2,0$ нм отношение энергий поляризационного и кулоновского взаимодействия к кинетической энергии электрона составляет большую величину $(\bar{U}_{pol}^{1,0,0}(S) + \bar{V}_{eh}^{1,0,0;t_h}(S))/T_{1,0}^e(S) \cong (49\% \dots 82\%)$. Даже для предельно экспериментально допустимой малой КТ радиусом $a = 1,5$ нм такое отношение принимает существенное значение ($\cong 38\%$) (см. рис. 2).

2.4. Спектр тяжелой дырки в адиабатическом электронном потенциале квантовых точек

В экспериментальной работе [16] исследовались низкотемпературные ($T = 4,2$ К) спектры межзонного поглощения диспергированных в прозрачной матрице силикатного стекла (с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_1 = 1,5$) КТ CdS (с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_2 = 9,3$) размером $a \leq a_{ex}$. В области переходов на нижний уровень ($n_e = 1, l_e = m_e = 0$) размерного квантования электрона была обнаружена структура, состоящая из эквидистантной серии уровней, расстояние между которыми (т.е. величина расщепления) $\Delta E(a) \sim \sim a^{-3/2}$. Величина расщепления качественно описывалась формулой (14) [16]. Указанная структура обусловлена квантованием энергетического спектра тяжелой дырки в адиабатическом потенциале электрона в КТ. Эффективные массы электрона и дырки в КТ CdS равнялись $m_e = 0,205 m_0$ и $m_h = 5 m_0$.

В экспериментальных работах [12–16, 37–39, 57, 58, 83, 86, 87] было показано, что распределение КТ по радиусам a описывалось функцией Лифшица–Слезова [88]:

$$f(u) = \begin{cases} \frac{3^4 e u^2 \exp\left[-(1 - 2u/3)^{-1}\right]}{2^{5/3} (u + 3)^{2/3} (3/2 - u)^{1/3}}, & u = \frac{a}{\bar{a}} < \frac{3}{2}, \\ 0, & u > \frac{3}{2}, \end{cases} \quad (47)$$

где \bar{a} — средний радиус КТ. Полученный в [41, 60–62, 72–79] спектр экситона (32) применим (в условиях экспериментов [16, 58, 83, 86]) в области радиусов КТ $a \leq a_{ex}$ (12).

В [73, 74], путем усреднения формулы $\omega(S, n_e)$ (22) по функции распределения Лифшица–Слезова (47), была учтена дисперсия КТ по радиусам a . В результате получено выражение, определяющее расстояние между эквидистантной серией в спектре дырки:

$$\bar{\omega}(S, n_e) = 2,232 \left(1 + (2/3)\pi^2 n_e^2\right)^{1/2} (m_e/m_h)^{1/2} S^{-3/2}. \quad (48)$$

Из сравнения формулы (48) (при $n_e = 1$) с экспериментальной зависимостью величины расщепления $\Delta E(a) = \bar{\omega}(a, n_e = 1)$ от размера КТ a , полученной в [16] следует, что для КТ с радиусами $a \leq a_{ex}$ значение расщепления $\bar{\omega}(a, n_e = 1)$ (48) (при $a = 2$ нм $\bar{\omega} = 46,7$ мэВ и при $a = 3$ нм $\bar{\omega} = 28,29$ мэВ) находится в хорошем согласии с экспериментальными данными [16], (соответственно при $a = 2$ нм и $a = 3$ нм величина расщепления $\Delta E = 49,6$ мэВ и $\Delta E = 30,1$ мэВ), отличаясь от последних лишь незначительно ($\leq 6\%$) [73, 74].

Таким образом, учет существенного вклада $(1/(2/3)\pi^2 n_e^2)$, который вносит в частоту осцилляторных колебаний дырки $\bar{\omega}(S, n_e)$ (48) поляризационное взаимодействие, по сравнению с вкладом кулоновского взаимодействия электрона и дырки в частоту колебаний дырки (48), открывает возможность количественного описания расщепления $\Delta E(a)$ эквидистантных уровней в КТ [16].

В [19] ошибочно предполагалось, что спектр дырки в КТ определяется только энергией размерного квантования дырки $T_{n,l}^h(a)$ (11) в сферической потенциальной яме бесконечной глубины КТ радиусом a .

В [46, 47] проводился теоретический анализ возможности использования переходов тяжелой дырки между эквидистантной серией уровней $\lambda_{n_e, l_e}^h(a)$ (20) в адиабатическом потенциале электрона в КТ CdS в условиях экспериментов [16] в оптическом нанолазере. В таком нанолазере, активную область которого составлял массив КТ CdS с радиусами $a \leq a_{ex}$, зависимость энергии рабочего перехода нанолазера $\Delta E(a) = \bar{\omega}(a, n_e) \sim a^{-3/2}$ (48) от радиуса a КТ позволяла изменять величину энергии рабочего перехода $\Delta E(a)$ в широком диапазоне в ИК-области спектра.

3. ДИАГНОСТИКА КВАЗИНУЛЬМЕРНЫХ СИСТЕМ

3.1. Определение размеров квантовых точек

В экспериментальной работе [86] исследовались низкотемпера-

турные ($T \leq 80$ К) спектры поглощения КТ сульфида кадмия с радиусами a порядка нескольких нм, диспергированных в прозрачной матрице SiO_2 (с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = 1,8$). В [86] также был исследован спектр исходного нетермообработанного образца (спектр 4). В результате термообработки образцов в их спектрах наблюдалось дополнительное поглощение в длинноволновой части спектра, край которого сдвигался в коротковолновую сторону при уменьшении температуры отжига (спектры 1–3). Авторы работы [86] предполагали, что этот сдвиг обусловлен квантоворазмерным эффектом и связан с уменьшением среднего размера a КТ CdS при понижении температуры термообработки.

С учетом формул (11), (22) и (24)–(31) запишем спектр экситона (32) в явном виде:

$$E_{n_e,0,0}^{t_h}(S) - E_g = \frac{\pi^2 n_e^2}{S^2} - \frac{2(\ln(2\pi n_e) + \gamma - \text{Ci}(2\pi n_e))}{S} + \omega(S, n_e) \left(t_h + \frac{3}{2} \right) + \frac{Z_{n_e,0} + (\varepsilon_2 / \varepsilon_1) - 1}{S}. \quad (49)$$

Учет дисперсии КТ по радиусам a приводит к тому, что в кинетической энергии электрона (первый член в (49)) появляется коэффициент $K = 0,67$ [37], а частота осцилляторных колебаний дырки $\omega(S, n_e)$ будет теперь определяться формулой $\bar{\omega}(\bar{S}, n_e)$ (48). Кроме того, проведенная в [38] численная обработка результатов рентгеновских измерений с учетом дисперсии КТ по размерам показала, что среднее по распределению Лифшица–Слезова (47) значение радиуса КТ $\bar{S} = (\bar{a} / a_e) = 0,86 S$ (где $S = (a / a_e)$ — значение радиуса КТ, полученное в монодисперсном приближении). С учетом вышесказанного спектр экситона (49) в КТ принимал такой вид [73–78]:

$$E_{n_e,0,0}^{t_h}(\bar{S}) - E_g = K \frac{\pi^2 n_e^2}{\bar{S}^2} - \frac{2(\ln(2\pi n_e) + \gamma - \text{Ci}(2\pi n_e))}{\bar{S}} + \bar{\omega}(\bar{S}, n_e) \left(t_h + \frac{3}{2} \right) + \frac{Z_{n_e,0} + (\varepsilon_2 / \varepsilon_1) - 1}{\bar{S}}. \quad (50)$$

Спектр экситона $E_{n_e,0,0}^{t_h}(\bar{a})$ (50) применим к условиям эксперимента [86] в области радиусов КТ $a < a_e \approx 3,0$ нм. Предположим, что спектры межзонного поглощения КТ CdS, полученные в [86], обусловлены разрешенными переходами электрона между краем валентной зоны и основным состоянием ($n_e = 1, l_e = m_e = 0; t_h = 0$) экситона. Из условия эксперимента [86] следует, что наибольшим размером \bar{a} из всех КТ CdS, имеющих минимальные радиусы \bar{a}

(они же являются ответственными за длинноволновый край поглощения в спектрах), обладают КТ, формирующие спектр поглощения образца (спектр 1).

Сравнивая спектр экситона $E_{1,0,0}^0(\bar{a})$ (50) со значением энергии края поглощения $E_1 = 3,27$ эВ в спектре 1, получим минимальный размер КТ $\bar{a}_1 = 2,97$ нм [78]. Отметим, что найденное значение радиуса КТ \bar{a}_1 удовлетворяло условиям существования (12), (23) спектра экситона (50).

3.2. Объемный экситон в квазиульмерной полупроводниковой системе

В [89] вариационным методом, в рамках приближения эффективной массы, но без учета энергии поляризационного взаимодействия электрона и дырки с поверхностью КТ, было получено выражение для спектра экситона, которое позволило проследить предельный переход к спектру объемного экситона,

$$E_{1,0,0}(S_{ex}) = -E_{ex} = -Ry_{ex} = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_{ex}^2}, \quad (51)$$

начиная с радиуса КТ $S_{ex} > S_{ex}^0 > 8$.

Найденный нами в [79] спектр экситона в КТ CdS в условиях экспериментов [15, 16, 18, 57, 58], который получен вариационным методом, в рамках приближения эффективной массы, а также с учетом энергии поляризационного взаимодействия, переходит в спектр объемного экситона (51) при $S_{ex} > \tilde{S}_{ex}^0 \geq 9,44$. При этом значение \tilde{S}_{ex}^0 отличается от S_{ex}^0 незначительно ($\leq 18\%$). Такое отличие связано с тем, что учёт энергии поляризационного взаимодействия (по сравнению со спектром экситона, полученного в [89] без учёта поляризационного взаимодействия) приводит к поднятию энергии экситона в положительную область $\sim S^{-1}$ (член (31) в спектре (50)). Кроме того, значения радиусов КТ S_{ex}^0 и \tilde{S}_{ex}^0 могут быть несколько завышенными, поскольку вариационный расчет спектра экситона дает завышенные значения энергии [80].

Для возникновения в КТ радиуса a объемного экситона необходимо, чтобы его энергия связи $E_{ex} = Ry_{ex}$ (51) значительно превосходила энергию поляризационного взаимодействия $\bar{U}_{pol}(S_{ex}) \sim \sim (e^2/\epsilon_2 a)$ (31) электрона и дырки с поверхностью КТ [8, 59–62, 77–79]:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu a_{ex}^2} \gg \frac{e^2}{\epsilon_2 a}. \quad (52)$$

Из неравенства (52) следует, что объемный экситон может обра-

зовываться только в КТ, радиус которой a должен быть больше некоторого критического размера КТ a_c [8, 59–62, 77–79]:

$$a > a_c > a_c^{(0)} \approx 2a_{ex}. \quad (53)$$

Проследим за качественной картиной возникновения объемного экситона на примере простой квазиульмерной системы, состоящей из КТ CdS, помещенных в матрицу борносиликатного стекла [15, 16, 57, 58]. В неограниченном полупроводниковом материале экситон большого радиуса возникал вследствие кулоновского притяжения $V_{eh}(r_e, r_h)$ (4) между электроном и дыркой [80]. В гамильтониан экситона (3), движущегося в объеме КТ, помимо кулоновского притяжения $V_{eh}(r_e, r_h)$ (4) между электроном и дыркой, будет также давать вклад дополнительное эффективное притяжение между ними, обусловленное отталкиванием электрона $V_{ee'}(r_e, a)$ (7) и дырки $V_{hh'}(r_h, a)$ (6) от своих изображений (см. рис. 1). Согласно формулам (24)–(27) энергия эффективного отталкивания между электроном и дыркой, которая описывается членами $V_{eh'}(r_e, r_h, a)$ и $V_{he'}(r_e, r_h, a)$ (8), вызванная притяжением квазичастиц к поверхности КТ (к «чужим» изображениям), будет меньше, чем энергия эффективного притяжения. При этом их отношение $(|\bar{V}_{eh'}(S) + \bar{V}_{he'}(S)| / (\bar{V}_{ee'}(S) + \bar{V}_{hh'}(S))) \approx 0,19$ и величина такого отношения не зависит от радиуса КТ S . Такое эффективное поляризационное притяжение приводит к тому, что движущиеся в КТ электрон и дырка будут локализованными в объеме КТ с эффективной массой $\mu = \mu(a)$, как функцией радиуса КТ a , большей, чем таковое значение массы экситона μ_0 в неограниченном полупроводниковом материале с диэлектрической проницаемостью ε_2 [8, 59–62, 75–79] (поскольку дырка в CdS является тяжелой ($m_h/m_e \approx 25$), то будем считать, что ее эффективная масса m_h в КТ не изменяется, а в КТ изменяется только эффективная масса электрона $m_e = m_e(a)$). Следовательно, объемный экситон с эффективной массой μ_0 не может образовываться в КТ с радиусом $a \leq a_{ex}$.

Таким образом, объемный экситон будет возникать только в КТ радиусом $a > a_{ex}$. При чем образование такого объемного экситона носит пороговый характер и возможно лишь только в КТ, размер которой a превышает значение некоторого критического радиуса КТ $a_c > a_{ex}$. С ростом размера КТ $a > a_{ex}$, эффективное притяжение между электроном и дыркой уменьшается $\sim a^{-1}$. Начиная с некоторого радиуса КТ a , равного a_c , энергия такого эффективного дополнительного притяжения между электроном и дыркой должна быть малой по сравнению с энергией связи экситона E_{ex} (51). При этом эффективная масса экситона в КТ $\mu(a) = \mu_0$ [8, 59–62, 75–79].

Приведенная выше качественная картина возникновения объемного экситона в КТ CdS в условиях экспериментов [15, 16, 57, 58] подтверждается полученными нами в [8, 59–62, 77–79] количественными результатами. Для этого используем спектр экситона $E_{n_e,0,0}^{t_h}(\bar{a})$ (50) в основном состоянии ($n_e = 1, l_e = m_e = 0; t_h = 0$) в КТ в области ее размеров $\bar{a} \geq a_{ex}$. Предположим, так же как и в работе [83], что спектр экситона (50) можно использовать и в случае КТ с размерами $\bar{a} \leq 3a_{ex}$. Основанием для того, чтобы продлить область применимости спектра экситона (50) до значений радиусов КТ $\bar{a} \leq 3a_{ex}$ является то обстоятельство, что найденный в рамках адиабатического приближения спектр экситона (50) находился в хорошем согласии со спектром экситона для КТ с радиусами $\bar{a} \leq 3a_{ex}$, который получен вариационным методом [79] (см. рис. 2).

Путем сравнения спектра экситона $E_{1,0,0}^0(\bar{a})$ (50) с экспериментальными положениями пиков поглощения в КТ CdS [15, 58] нами в [77] найдены эффективные массы электрона $m_e = m_e(\bar{a})$ и экситона $\mu = \mu(\bar{a})$ в КТ, как функции радиуса КТ \bar{a} . На рис. 6 представлены численные значения таких функций $m_e = m_e(\bar{a})$ и $\mu = \mu(\bar{a})$. Из поведения этих функций вытекает, что с ростом радиуса КТ $\bar{a} > a_{ex}$ эффективная масса экситона $\mu = \mu(\bar{a})$ (электрона $m_e = m_e(\bar{a})$) уменьшается, приближаясь при $\bar{a} = a_c^{(1)} = 2,8 a_{ex} \approx 7,0$ нм, к значению эффективной массы экситона μ_0 (электрона m_e^0) в неограниченном CdS (см. рис. 6).

В экспериментальной работе [57] было установлено, что неравновесные электроны, создаваемые при межзонном возбуждении КТ сульфида кадмия, имеют конечную вероятность преодоления потенциального барьера и выхода в матрицу борносиликатного стекла, в которую погружена КТ. В [60–62] было показано, что основной вклад в спектр экситона (43) в возбужденном состоянии ($n_e = 1, l_e = 1; t_h = 0$) в КТ CdS с радиусом $a = a_{ex} = 2,5$ нм, в условиях экспериментов [15, 16, 57, 58], вносит кинетическая энергия электрона $T_{1,1}^e(a)$ (42). Решая численно уравнения (37)–(42) с известными из экспериментов [15, 16, 57, 58] значениями энергии экситона $E_{1,1}^0 = E_g + 1,30$ эВ и высоты потенциального барьера $V_0 = 2,5$ эВ в КТ CdS радиуса $a = 2,5$ нм, в [60–62] было получено для неизвестного параметра β (41) численное значение $\beta = 0,322$, а также значение ранее неизвестной эффективной массы электрона $m_{e,1} = \beta^{-1} m_{e,2}$ в матрице силикатного стекла.

Сравнение спектра экситона $E_{n_e,0,0}^{t_h}(a)$ (43), полученного в [60–62] в предположении, что электрон может выходить из объема КТ в диэлектрическую матрицу, с экспериментальным экситонным спектром в КТ CdS [15, 16, 57, 58] показало, что объемный экситон возникает в КТ CdS, размер которого a превышает значение критического радиуса КТ $a_c^{(2)} = 1,7 a_{ex}$.

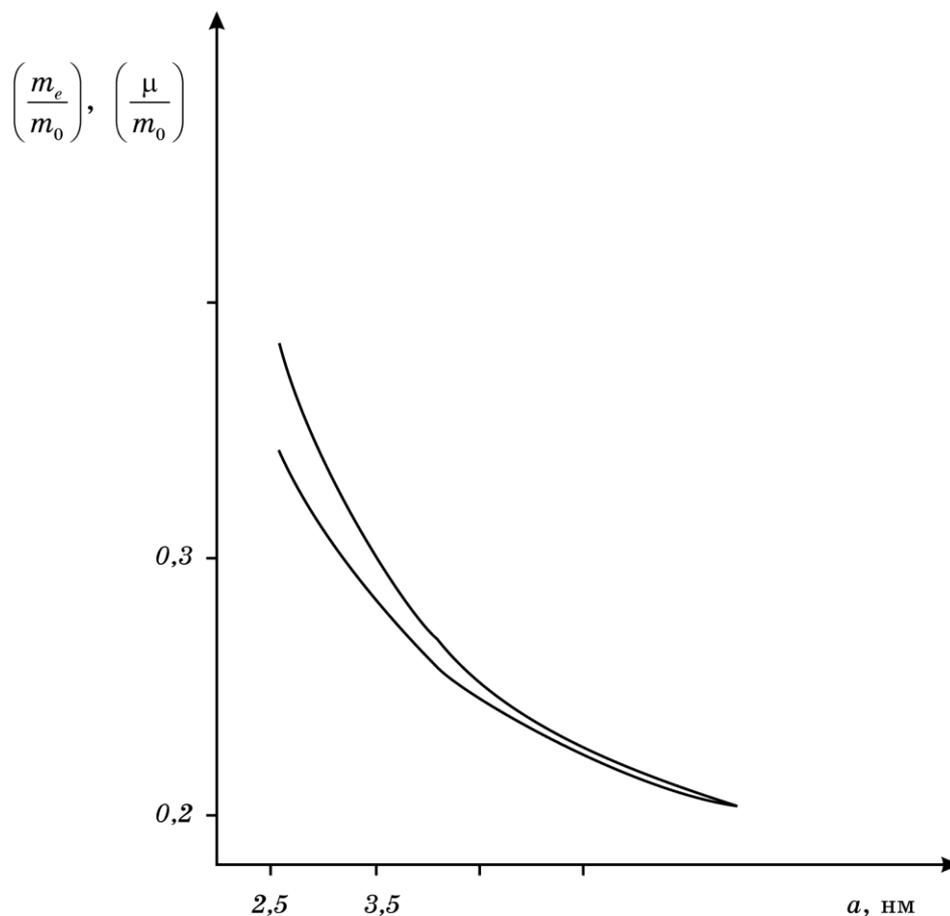


Рис. 6. Зависимости эффективных масс электрона $m_e(a)$ (кривая 1) и экситона $\mu(a)$ (кривая 2) от радиуса a КТ сульфида кадмия. Значения энергий $(E_{1,0,0}^0 - E_g)$ взяты из экспериментов [15, 58].

В работе [79], не ограничиваясь рамками адиабатического приближения, вариационным методом был найден спектр основного состояния экситона в КТ CdS. Новый оптический метод, предложенный нами [8, 59–62, 72–79], состоящий в сравнении теоретического спектра экситона с его экспериментальным спектром в КТ, позволил в [79] получить значение критического радиуса КТ CdS $a_c^{(3)} = 3,48 a_{ex}$. При этом значение критических радиусов КТ CdS $a_c^{(0)} = 2 a_{ex}$ (58), $a_c^{(1)} = 2,8 a_{ex}$ и $a_c^{(3)} = 3,48 a_{ex}$ находились в хорошем согласии друг с другом, отличаясь лишь в пределах $\leq 20\%$. Такое различие величин критических радиусов $a_c^{(2)}$ и $a_c^{(1)}$, $a_c^{(3)}$ обусловлено тем, что уровни энергии экситона $E_{n_e, l_e, 0}^{t_h}(a)$ (43) в потенциальной яме конечной глубины КТ находятся несколько

ниже, чем соответствующие уровни энергии экситона $E_{n_e, l_e, 0}^{t_h}(a)$ (50) полученные в приближении, в котором КТ рассматривалась как потенциальная яма бесконечной глубины.

В экспериментальной работе [87] было установлено, что сдвиги энергетических уровней размерного квантования электрона и дырки в КТ CdS в однородном внешнем электрическом поле в области межзонного поглощения определялись квадратичным эффектом Штарка. Нами в [90] был предложен новый электрооптический метод определения критического радиуса КТ CdS $a_c^{(4)} = 3,24 a_{ex}$, начиная с которого в КТ возникал объемный экситон. В таком методе величина критического радиуса $a_c^{(4)}$ определялась из условия равенства штарковского сдвига уровней размерного квантования дырки со штарковским сдвигом энергии основного состояния объемного экситона (штарковским сдвигом уровней размерного квантования электрона можно пренебречь по сравнению с величиной такового сдвига уровней дырки). При этом новый электрооптический метод давал величину радиуса КТ CdS $a_c^{(4)}$, отличающуюся лишь в пределах ($\leq 7\%$) от аналогичной величины критического радиуса КТ $a_c^{(3)} = 3,48 a_{ex}$, полученной в [79] с помощью нового оптического метода.

При межзонном поглощении света КТ порогом поглощения является частота света $\bar{\omega}(S, t_h = 2n_h = 0)$, которая определяется таким выражением [69, 70, 73, 74]:

$$\bar{\omega}(S, t_h = 0) = E_g + \frac{\pi^2}{S^2} + \frac{1}{S} \left(Z_{1,0} + P_{1,0} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) + \frac{3}{2} \omega(S, n_e = 1). \quad (54)$$

Формула (54) представляет собой закон, по которому эффективная ширина запрещенной зоны КТ увеличивается с уменьшением радиуса КТ S . При этом поляризационное взаимодействие (член $S^{-1}(Z_{1,0} + P_{1,0} + (\varepsilon_2/\varepsilon_1))$ в (54)) вносит положительный вклад в (54), в отличие от отрицательного вклада (член $2\beta_{n_{e-1}} S^{-1}$ (13) в [37]), который обусловлен учетом только лишь кулоновского взаимодействия. Другими словами, учет поляризационного взаимодействия носителей заряда с поверхностью КТ приводит к тому, что порог поглощения света $\bar{\omega}(S, t_h = 0)$ (54) претерпевает больший сдвиг (≈ 200 мэВ [70], в условиях экспериментов [15, 16, 57, 58], по сравнению с аналогичной величиной, полученной в [37] без учета поляризационного взаимодействия) в коротковолновую сторону.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе [18] был схематически построен график зависимости энергетического спектра экситона $E_{nl}(a)$ от радиуса a КТ (см. рис. 3).

Выражение для спектра экситона было получено этими же авторами в [37] в рамках адиабатического приближения. На графике (рис. 3) были изображены только зависимости $E_{nl}(a)$ для двух предельных случаев: КТ малого радиуса a (9) и КТ большого радиуса a (16). В этих двух предельных случаях спектр экситона $E_{nl}(a)$ описывался линейной зависимостью от (a^{-2}) . При этом наклон линейной зависимости $E_{nl}(a) \sim (a^{-2})$ в случае КТ малого радиуса a (9), согласно выражениям (10) и (11), определялся величиной эффективной массы электрона m_e (т.е. $E_{nl}(a) \sim m_e^{-1}a^{-2}$). Тогда как в другом предельном случае КТ большого радиуса a (16), согласно (17), этот наклон определялся величиной трансляционной массы экситона M (т.е. $E_{nl}(a) \sim M^{-1}a^{-2}$). Что же касалось КТ с радиусами $a \cong a_{ex}$ (12), то зависимость спектра экситона $E_{nl}(a)$ от радиуса a КТ на графике не была определена.

Таким образом, для КТ малых радиусов a (9) спектр экситона описывался спектром электрона $E_{nl}^e(a) = T_{nl}^e(a)$ (11), который определялся кинетической энергией электрона $T_{nl}^e(a)$ (11), движущегося в бесконечно глубокой сферической потенциальной яме КТ [6, 13–15, 18, 37, 57]. Нами в п. 2.3 (см. рис. 4 и 5) было показано, что даже для предельно экспериментально допустимых малых КТ кинетическая энергия электрона $T_{nl}^e(a)$ (11) вносит в спектр экситона $E_{n_e,0,0}^{t_h}(a)$ (32), (49), (50) лишь вклад ($\approx 60\%$), по порядку величины сравним со вкладами, которые дают в спектр экситона энергии поляризационного $\bar{U}_{pol}^{n_e,0,0}(a)$ (31) и кулоновского $\bar{V}_{eh}^{n_e,0,0,t_h}(a)$ (29) взаимодействий. В связи с этим описание спектра экситона в КТ малых радиусов a (9) только выражением для кинетической энергии электрона $T_{nl}^e(a)$ (11) в [6, 13–15, 18, 37, 57] является не совсем оправданным.

В наименее исследованном случае, когда радиус a КТ сравним с боровским радиусом экситона a_{ex} (т.е. при $a \approx a_{ex}$ (12)), как было показано нами в п. 2.1, 2.2, 3.1, спектр экситона $E_{n_e,0,0}^{t_h}(a)$ (32), (49), (50), как функция радиуса a КТ, описывался сложной зависимостью $E_{n_e,0,0}^{t_h}(a) = f(a^{-1}, a^{-3/2}, a^{-2}, m_e^{-1}, m_h^{-1})$ (см. рис. 3). Причем эффективная масса электрона $m_e = m_e(a)$, а вместе с ней и эффективная масса экситона $\mu = \mu(a)$, также являлись функциями от радиуса a КТ [75–79].

Таким образом, в настоящем обзоре, в отличие от оптических методов, развитых в [6], которые позволяли определять как параметры спектров квазичастиц (электронов, дырок и экситонов), так и некоторые параметры квазиульмерных полупроводниковых систем, такие как средний радиус \bar{a} КТ, эффективные массы электрона и дырки, ширину запрещенной зоны E_g КТ, предложен новый подход к вышеуказанным оптическим и электрооптическим методам. Такой подход основан на учете в гамильтониане квазичастиц энергий кулоновского и поляризационного

взаимодействия, которые играли доминирующую роль в оптических свойствах квазиульмерных систем, состоящих из полупроводниковых нанокристаллов даже предельно экспериментально допустимых малых радиусов.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. И. Алферов, *ФТП*, **32**, № 1: 3 (1998).
2. A. D. Yoffe, *Adv. Phys.*, **42**, No. 2: 173 (1993).
3. М. Ткач, *Квазічастинки у наногетеросистемах. Квантові точки та дроти* (Чернівці: Чернівецький національний університет: 2003).
4. А. П. Шпак, Ю. А. Куницький, О. О. Коротченко, С. Ю. Смик, *Квантові низькорозмірні системи* (Київ: Академперіодика: 2003).
5. А. П. Шпак, В. В. Шилов, О. А. Шилова, Ю. А. Куницький, *Диагностика наносистем. Многоуровневые фрактальные наноструктуры* (Киев: Академперіодика: 2004).
6. Н. Р. Кулиш, В. П. Кунец, М. П. Лисица, *Квантовая электроника* (Киев: Институт полупроводников НАН Украины: 1994), т. **46**, с. 75; idem, *УФЖ*, **35**, № 12: 1817 (1990); idem, *УФЖ*, **41**, № 11–12: 1075 (1996); idem, *ФТТ*, **39**, № 10: 1865 (1997).
7. С. В. Гапоненко, *ФТП*, **30**, № 4: 577 (1996).
8. С. И. Покутний, *Теория экситонов в квазиульмерных полупроводниковых системах* (Одесса: Астропринт: 2003).
9. Е. А. Андришин, Ф. Ф. Быков, *УФН*, **154**, № 2: 123 (1988).
10. Н. Н. Леденцов, В. М. Устинов, В. А. Щукин и др., *ФТП*, **32**, № 4: 385 (1998).
11. N. A. Gun'ko, V. B. Khalfin, Z. N. Sokolova, and G. G. Zegrya, *J. Appl. Phys.*, **84**: 547 (1998).
12. В. В. Голубков, А. И. Екимов, А. А. Онущенко, В. А. Цехомский, *ФХС*, **6**, № 3: 511 (1980).
13. А. И. Екимов, А. А. Онущенко, *Письма в ЖЭТФ*, **34**, № 6: 363 (1981).
14. А. И. Екимов, А. А. Онущенко, *ФТП*, **16**, № 7: 1215 (1982).
15. А. И. Екимов, А. А. Онущенко, *Письма в ЖЭТФ*, **40**, № 8: 337 (1984).
16. А. И. Екимов, А. А. Онущенко, Ал. Л. Эфрос, *Письма в ЖЭТФ*, **43**, № 6: 292 (1986).
17. G. R. Olbright, N. Peyghambarian, S. W. Koch et al., *Optics Lett.*, **12**, No. 6: 413 (1987).
18. A. I. Ekimov and Al. L. Efros, *Phys. Stat. Sol. B*, **150**, No. 2: 627 (1988).
19. R. Rossetti, S. Nakahava, and L. Brus, *J. Chem. Phys.*, **79**, No. 2: 1086 (1983).
20. L. Brus, *J. Chem. Phys.*, **79**, No. 6: 5566 (1983).
21. R. Rossetti and L. Brus, *J. Chem. Phys.*, **82**, No. 1: 552 (1985).
22. H. Chestnoy and L. Brus, *J. Chem. Phys.*, **85**, No. 2: 2237 (1985).
23. L. E. Brus, *J. Chem. Phys.*, **80**, No. 9: 4403 (1984).
24. Н. Н. Леденцов, В. М. Устинов, В. А. Щукин и др., *ФТП*, **32**, № 4: 385 (1998).
25. В. П. Евтихийев, И. В. Кудряшов, Е. Ю. Котельников и др., *ФТП*, **32**, № 12: 1482 (1998).

26. А. Ф. Цацульников, Н. Н. Леденцов, М. В. Максимов и др., *ФТП*, **30**, № 10: 1822 (1996).
27. Н. А. Ефремов, С. И. Покутний (Москва: 1984) (Препринт/Институт спектроскопии АН СССР. № 1, 1984). 34 с.
28. Н. А. Ефремов, С. И. Покутний, *ФТТ*, **27**, № 1: 48 (1985).
29. Н. А. Ефремов, С. И. Покутний, *ФТТ*, **32**, № 10: 2921 (1990).
30. Н. А. Ефремов, С. И. Покутний, *ФТТ*, **33**, № 10: 2845 (1991).
31. S. I. Pokutnyi and N. A. Efremov, *Phys. Stat. Sol. B*, **165**, No. 1: 109 (1991).
32. S. I. Pokutnyi, *Phys. Stat. Sol. B*, **172**, No. 2: 573 (1992).
33. С. И. Покутний, *ФТТ*, **35**, № 2: 257 (1993).
34. С. И. Покутний, *ФТП*, **31**, № 12: 1443 (1997).
35. Е. А. Андрияшин, А. П. Силин, *ФТТ*, **33**, № 1: 211 (1991).
36. H. Watanabe and T. Inoshita, *Optoelectron. Device Technol.*, **1**, No. 1: 33 (1986).
37. Ал. Л. Эфрос, А. Л. Эфрос, *ФТП*, **16**, № 7: 1209 (1982).
38. А. И. Екимов, А. А. Онущенко, М. Э. Райх, Ал. Л. Эфрос, *ЖЭТФ*, **90**, № 5: 1795 (1986).
39. А. И. Екимов, А. А. Онущенко, А. Г. Плюхин, Ал. Л. Эфрос, *ЖЭТФ*, **88**, № 4: 1490 (1985).
40. Н. А. Ефремов, С. И. Покутний, *Труды 14 Всесоюзн. Пекаровского совещ. по теории полупроводников* (Донецк: Дон. ФТИ АН УССР: 1989), с. 82.
41. Н. А. Ефремов, С. И. Покутний, *ФТТ*, **32**, № 6: 1637 (1990).
42. Н. В. Ткач, В. А. Головацкий, *ФТТ*, **32**, № 8: 2512 (1990).
43. Г. В. Григорян, А. В. Родина, Ал. Л. Эфрос, *ФТТ*, **32**, № 12: 3512 (1990).
44. L. Banyai, P. Gilliot, Y. Z. Hu, and S. W. Koch, *Phys. Rev. B*, **45**, No. 24: 14136 (1992).
45. H. Shinojima, J. Yumoto, and N. Uesugi, *Appl. Phys. Lett.*, **60**, No. 3: 298 (1992).
46. S. I. Pokutnyi, W. Salejda, L. Jacak, and J. Misiewicz, *Optica Applicata*, **32**, No. 1–2: 147 (2002).
47. S. I. Pokutnyi, *Phys. Low-Dim. Struct.*, **11/12**: 67 (2002).
48. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов* (Москва: Наука: 1979).
49. А. М. Габович, Л. Г. Ильченко, Э. А. Пашицкий, *ЖЭТФ*, **79**, № 2: 665 (1980).
50. Yu. V. Kryuchenko and V. I. Sugakov, *Phys. Stat. Sol. B*, **111**, No. 1: 177 (1982).
51. О. С. Зинец, Ю. В. Крюченко, В. И. Сугаков, *ФТТ*, **26**, № 9: 2587 (1984).
52. И. Ю. Голиней, В. И. Сугаков, *ФНТ*, **11**, № 7: 775 (1985).
53. B. Honerlage, R. Levy, and J. V. Grun, *Phys. Rep.*, **124**, No. 1: 161 (1985).
54. L. E. Brus, *Appl. Phys. A*, **53**, No. 3: 465 (1991).
55. R. Ruppri, *J. Phys. Chem. Sol.*, **50**, No. 6: 877 (1989).
56. В. И. Марченко, *ЖЭТФ*, **81**, № 4: 1141 (1981).
57. В. Я. Грабовский, Я. Я. Дзенис, А. И. Екимов, *ФТТ*, **31**, № 1: 272 (1989).
58. D. Cherek, A. Efros, and A. Ekinov, *J. Lumin.*, **47**, No. 3: 113 (1990).
59. С. И. Покутний, *Тез. докл. 16 Междунар. совещ. по теор. полупроводников (Одесса, 1994)* (Донецк: Дон. ФТИ НАН Украины: 1994), с. 61.
60. С. И. Покутний, *УФЖ*, **40**, № 7: 743 (1995).
61. S. I. Pokutnyi, *Phys. Lett. A*, **203**, No. 7: 388 (1995).

62. С. И. Покутний, *ФТТ*, **38**, № 2: 512 (1996).
63. Г. Г. Зегря, А. С. Полковников, *ЖЭТФ*, **113**, № 4: 1491 (1998).
64. С. И. Покутний, *ФТТ*, **39**, № 4: 720 (1997).
65. С. И. Покутний, *ФТТ*, **39**, № 4: 606 (1997).
66. Ю. В. Вандышев, В. С. Днепровский, В. И. Климов, *ЖЭТФ*, **101**, № 1: 270 (1992).
67. S. I. Pokutnyi, L. Jacak, J. Misiewicz, and W. Salejda, *Phys. Low-Dim. Struct.*, **9/10**: 21 (2001).
68. Г. Б. Григорян, Э. М. Казарян, Ал. Л. Эфрос, *ФТТ*, **32**, № 6: 1772 (1990).
69. С. И. Покутний, *ФТТ*, **41**, № 7: 1310 (1999).
70. С. И. Покутний, *ФТП*, **37**, № 6: 743 (2003).
71. Ю. Е. Лозовик, Д. Р. Мусин (Москва: 1981) (Препринт/Институт спектроскопии АН СССР. № 20, 1981). 20 с.
72. S. I. Pokutnyi, *Phys. Low-Dim. Struct.*, **7/8**: 39 (2002).
73. С. И. Покутний, *ФТП*, **25**, № 4: 628 (1991).
74. S. I. Pokutnyi, *Phys. Lett. A*, **168**, No. 5–6: 433 (1992).
75. S. I. Pokutnyi, *Phys. Stat. Sol. B*, **173**, No. 2: 607 (1992).
76. С. И. Покутний, *ФТТ*, **34**, № 8: 2386 (1992).
77. С. И. Покутний, *ФТП*, **30**, № 11: 1952 (1996); idem, *УФЖ*, **42**, № 1: 111 (1997).
78. С. И. Покутний, *ФТП*, **30**, № 7: 1320 (1996).
79. С. И. Покутний, *ФТТ*, **38**, № 9: 2667 (1996).
80. А. И. Ансельм, *Введение в теорию полупроводников* (Москва: Наука: 1978).
81. А. С. Давыдов, *Квантовая механика* (Москва: Наука: 1973).
82. Н. Ф. Гашимзаде, Е. Л. Ивченко, *ФТП*, **25**, № 2: 323 (1991).
83. А. И. Екимов, А. А. Онущенко, С. К. Шумилов, Ал. Л. Эфрос, *Письма ЖТФ*, **13**, № 5: 281 (1987).
84. Y. Kayanuma, *Phys. Rev. B*, **38**, No. 14: 9797 (1988).
85. Y. Kayanuma, *Sol. St. Commun.*, **59**, No. 6: 405 (1986).
86. С. Ф. Гуревич, А. И. Екимов, И. А. Кудрявцев, *ФТП*, **26**, № 1: 102 (1992).
87. А. И. Екимов, А. П. Скворцов, Т. В. Шубина, *ЖТФ*, **59**, № 3: 202 (1989).
88. И. М. Лифшиц, В. В. Слезов. *ЖЭТФ*, **35**, № 2: 479 (1958).
89. Н. В. Ткач, В. А. Головацкий (Киев: 1990) (Препринт/Институт теоретической физики АН УССР. ИТФ-90-59Р, 1990). 12 с.
90. С. И. Покутний, *ФТП*, **34**, № 9: 1120 (2000); idem, *УФЖ*, **46**, № 7: 701 (2001); idem, *J. Appl. Phys.*, **96**, No. 2: 1115 (2004).
91. A. L. Efros and A. V. Rodina, *Phys. Rev. B*, **47**, No. 10: 10005 (1993).
92. M. Nirmal, D. Norris, and A. L. Efros, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, No. 10: 3728 (1995).